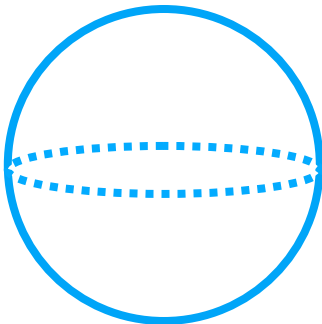
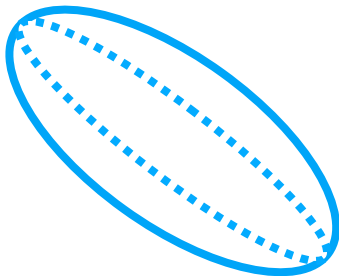
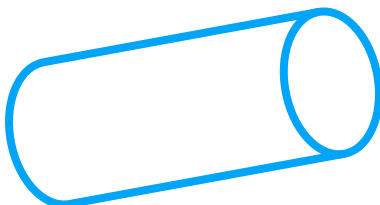
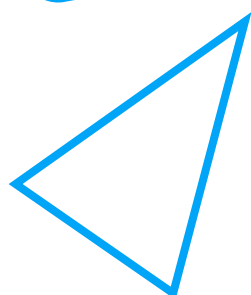
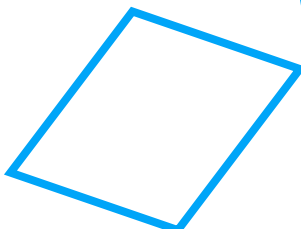
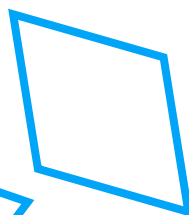
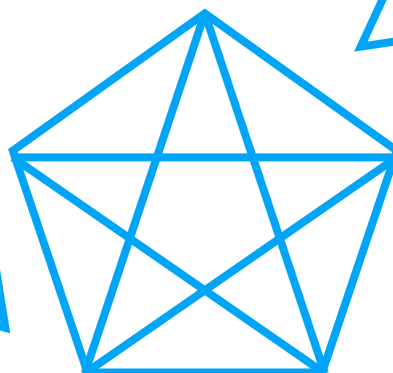
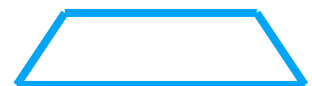
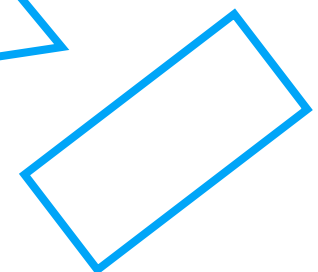
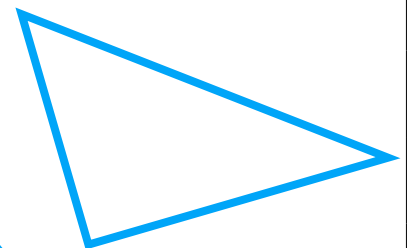
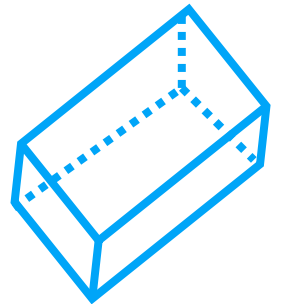
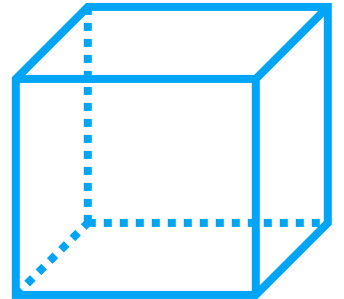
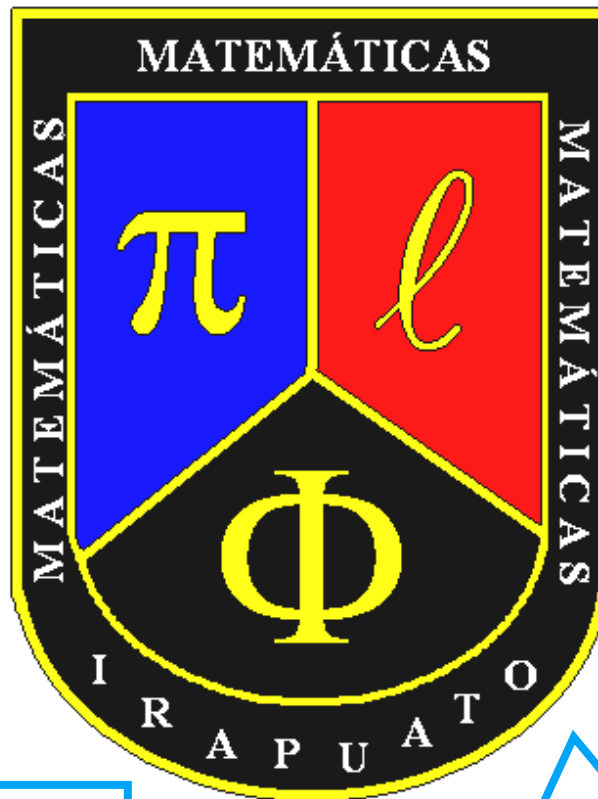




“Apuntes de Geometría y Trigonometría”

$$+ - x + \sqrt{x} x' \Sigma \theta \in \int \leftrightarrow \infty$$





Geometría

G**eometría:** Proviene del vocablo griego –Geo- que significa tierra y –metron- medida, así entonces geometría se refiere a la medida de la tierra.

Aunque no solo la medida de la tierra pudo haber sido origen de la geometría, sino también de la necesidad que sentimos de construir, decorar, contemplar, prever y medir el universo que nos rodea.

La geométrica para su estudio se bifurca, la **Planimetría:** que estudia las figuras en el plano, y la **Estereometría:** que estudia las figuras en el espacio.

Definiciones Fundamentales

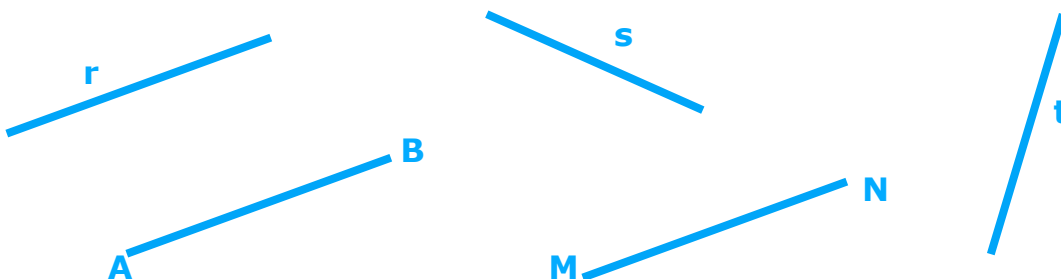
Punto

Es el inicio y el fin de una recta, Es adimensional y se les nombra con las letras mayúsculas **A, B, C**, etc. Ejemplo:



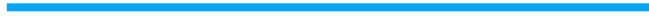
Línea

Es una sucesión infinita de puntos. Tiene una sola dimensión y se les nombra con las letras minúsculas **r, s, t...** o por dos letras mayúsculas **AB, MN**, etc. Ejemplo:

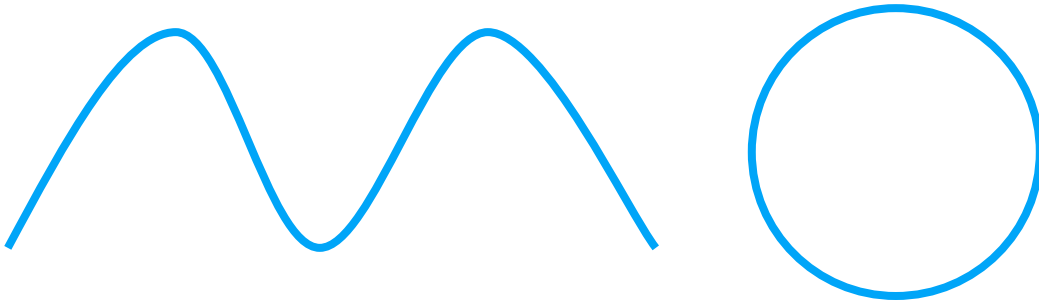




Línea Recta: todos sus puntos están en una misma dirección.



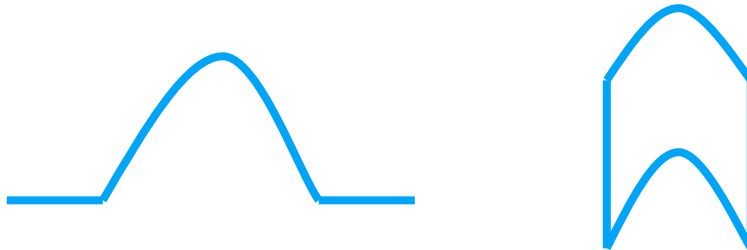
Línea curva: Todos sus puntos están en diferente dirección



Línea quebrada: formada por segmentos de línea recta



Línea mixta: esta formada por segmentos de línea recta y curva.



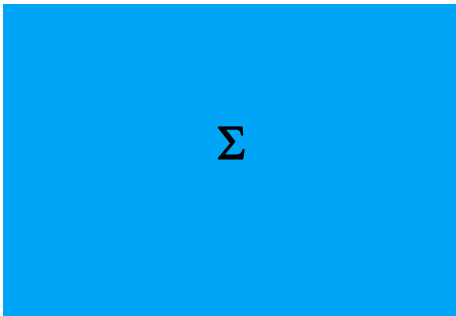
Las propiedades de la línea recta son:

- 1.** La línea recta es la distancia mas corta entre dos puntos.
- 2.** Dos líneas rectas no pueden tener más que un solo punto en común.
- 3.** Por dos puntos pasa una línea recta y solamente una.
- 4.** Una recta se extiende sin límite en dos sentidos.
- 5.** Por un punto pueden pasar una infinidad de rectas, y en una recta hay una infinidad de puntos.



Plano

Es un conjunto parcial de puntos infinitos, tiene dos dimensiones, y se les designa con mayúsculas **P, M, N...**o bien letras griegas $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma...$ etc.

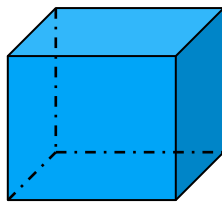


Las propiedades de un plano son:

1. Es una superficie ilimitada.
2. Una recta que tenga dos puntos comunes con el plano esta contenida en el, es decir tiene sus puntos en el plano.
3. Una recta cualquiera que esta contenida en un plano, divide a este en dos partes llamadas semiplanos.
4. Por tres puntos no situados en línea recta pasa un solo plano.

Espacio

Es un conjunto ordenado de planos, tiene tres dimensiones, y forma el universo en el que se pueden representar cuerpos geométricos tangibles.



Las propiedades del espacio son:

1. Es un volumen ilimitado que representa el universo.
2. Contiene a toda la infinidad de puntos que forman rectas y planos.
3. Un Plano cualquiera que esta contenida en el espacio, divide a este en dos partes llamadas semiespacios.
4. Dos puntos ubicados en el espacio definen una recta.
5. Tres puntos no situados en línea recta ubicados en el espacio definen un plano.

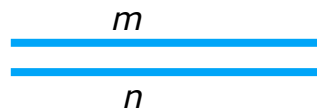


Clasificación de las Rectas

Recta Paralela: Diremos que dos rectas son paralelas cuando están en el mismo plano, y por mucho que las prolonguemos no llegan a cortarse nunca. El Angulo que forman con el eje XX' Ambas rectas es igual.

Las propiedades de las rectas paralelas son:

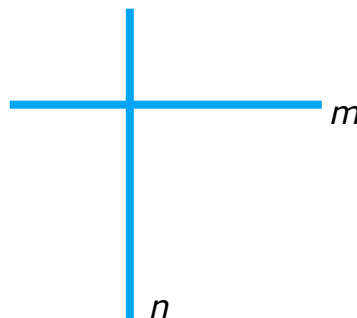
- Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
- Si dos rectas son paralelas, toda recta que corte a una, corta también a la otra.
- **5° Postulado de Euclides:** "Por un punto exterior a cualquier recta se puede trazar una paralela a ella y solo una."



Recta Perpendicular: Diremos que dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando ángulos iguales, y por tanto rectos.

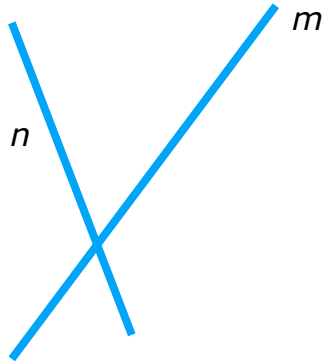
Las propiedades de las rectas perpendiculares son:

- Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.
- Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular a una, es perpendicular también a la otra.
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar una perpendicular a ella y solo una.





Rectas Oblicuas: Son las que se cortan sin ser necesariamente perpendiculares.

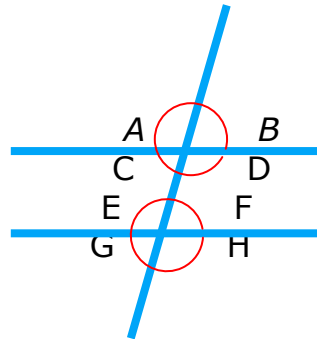


Nota: Para decir que una recta "r" es perpendicular a la "t" lo expresamos como $r \perp t$, y "r" paralela a "t" como $r // t$.



Ángulos formados por dos Paralelas y una Secante

Si cortamos dos rectas paralelas con una recta secante se forman ocho ángulos que tienen diversas propiedades.



- **Ángulos Internos:** C, D, E, F.
- **Ángulos Externos:** A, B, G, H.
- **Ángulos Alternos Internos:** Los Pares (E,D) (C,F) Son iguales.
- **Ángulos Alternos Externos:** Los Pares (B,G) (A,H) Son iguales.
- **Ángulos Correspondientes:** Los Pares (A,E) (B,F) (C,G) (D,H) Son iguales.
- **Ángulos Colaterales Internos:** Los Pares (C,E) (D,F) Son Suplementarios.
- **Ángulos Colaterales Externos:** Los Pares (A,G) (B,H) Son Suplementarios.
- **Ángulos Opuestos Por El vértice:** Son aquellos que los lados de uno son prolongaciones opuestas de los lados del otro. Su principal característica es que son ángulos iguales. Nos estamos refiriendo a Los Pares (A,D) (C,B) (G,F) (E,H).



Los Ángulos

Angulo: Es la abertura comprendida entre dos rectas que se encuentran girando alrededor de un punto de origen llamado **vértice**. Las rectas se llaman **lados** del ángulo.

Se considerara Angulo **positivo** aquel que se obtiene si uno de sus lados lo giramos en sentido contrario al de las manecillas de un reloj. Si lo hacemos en el mismo sentido, el Angulo será **negativo**.

Sistemas para Medir Ángulos

Existen 4 tipos de sistemas los cuales podemos utilizar en la medición de ángulos, tenemos el sistema **sexagesimal**, el **centesimal**, el **trigonométrico**, y el **horario**.

Sistema Sexagesimal: Utiliza como unidad fundamental el grado sexagesimal (1°) que es la **360ava** parte de una circunferencia.

Como submúltiplo del grado se emplea el minuto que es la 60ava parte del grado, o sea, que un grado (1°) equivale a sesenta minutos ($60'$). El segundo es la 60ava parte del minuto, o sea, un minuto ($1'$) equivale a sesenta segundos ($60''$). Los segundos se subdividen en décimas, centésimas, milésimas, etc.

$$\begin{aligned}1^\circ &= 60' \\1' &= 60''\end{aligned}$$

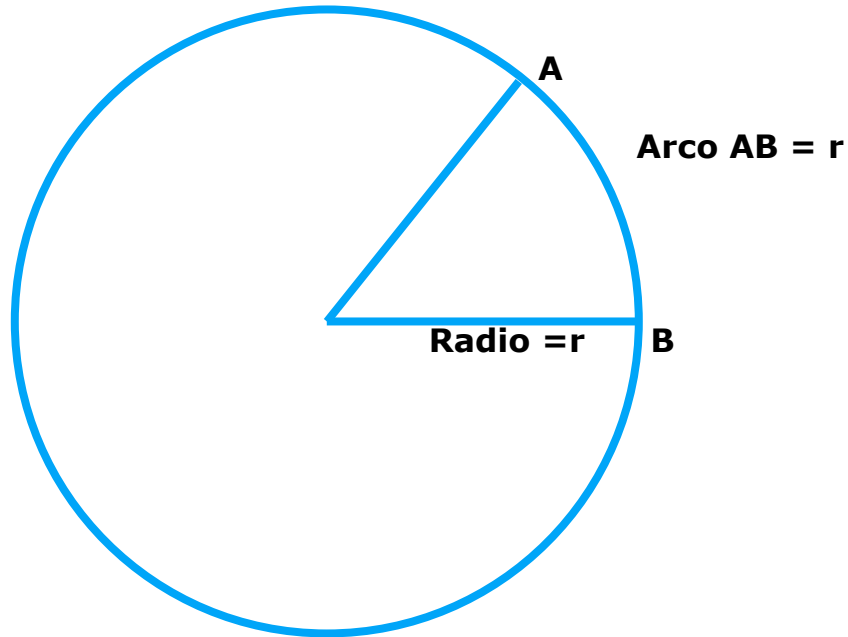
Sistema Centesimal: Utiliza como unidad fundamental el grado centesimal (1^g) que es la Centésima parte de Un Angulo Recto.

Como submúltiplos del grado centesimal, tenemos el minuto y el segundo centesimal, que son iguales respectivamente a la centésima parte del grado y el minuto.

$$\begin{aligned}90^\circ &= 100^g \\1^g &= 100^m \\1^m &= 100^s\end{aligned}$$



Sistema Trigonométrico: Utiliza como unidad fundamental el **Radian**, que se define como aquel Angulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual a la del radio.



$$P = \pi D$$

$$A = \pi r^2$$

$$D = 2r$$

Para deducir el valor de un radian partiremos de la formula para calcular el perímetro de una circunferencia.

$$P = \pi D$$

Donde el perímetro es igual a multiplicar el diámetro, por el Valor de π (3.141592...), o de otra forma, "que el diámetro cabe π veces en la circunferencia". Si el radio es la mitad del diámetro, entonces el radio cabra 2π veces en la circunferencia.

También sabemos que el giro completo de una circunferencia vale 360° , entonces si dividimos los 360° entre el número de veces que cabe el radio en la circunferencia (2π), obtendremos el valor de un Radian.

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 57.29577951 \dots$$



Simplificando el quebrado anterior obtendremos que un radian equivale al cociente de 180° entre π .

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 1 \text{ Rad.} \quad \text{Despejando los } 180^\circ \text{ tenemos que } \mathbf{180^\circ = (1 \text{ Rad.})(\pi)}$$

O sea que π Radianes Es igual a 180° . Y gracias a estos quebrados podremos obtener las siguientes equivalencias

Rad.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{3}{4\pi}$	$\frac{5}{6\pi}$	π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°

Rad.	$\frac{7}{6\pi}$	$\frac{5}{4\pi}$	$\frac{4}{3\pi}$	$\frac{3}{2\pi}$	$\frac{5}{3\pi}$	$\frac{7}{4\pi}$	$\frac{11}{6\pi}$	2π
Grados	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

Sistema Horario: Utiliza como unidad fundamental la hora (1^h), que equivale a la sexta parte del Angulo recto, o sea, 15°

Sus submúltiplos son el minuto que es igual a la 60ava parte de la hora, y el segundo que es igual a la 60ava parte del minuto.

$$\begin{aligned} 1^h &= 15^\circ \\ 1^h &= 60^m \\ 1^m &= 60^s \end{aligned}$$

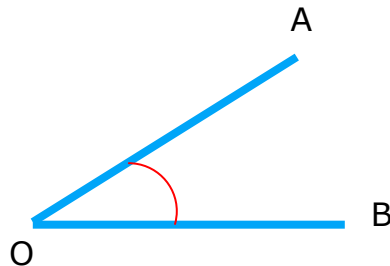
Nota: El sistema Centesimal, Tanto como el sistema horario han quedado en desuso.



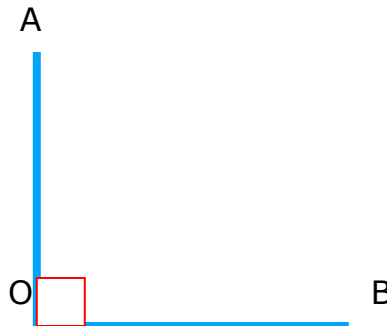
Clasificación de los Ángulos

Para la siguiente clasificación tomaremos como referencia el sistema sexagesimal.

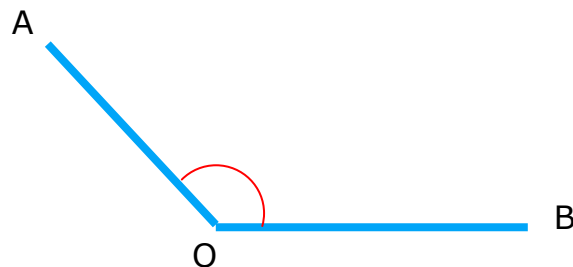
Angulo Agudo: El que mide entre 0° y 90° sexagesimales.



Angulo Recto: Cuando Mide 90° sexagesimales.

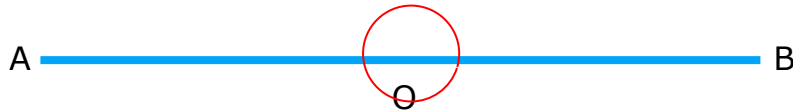


Angulo Obtuso: Cuando mide entre 90° y 180° sexagesimales.

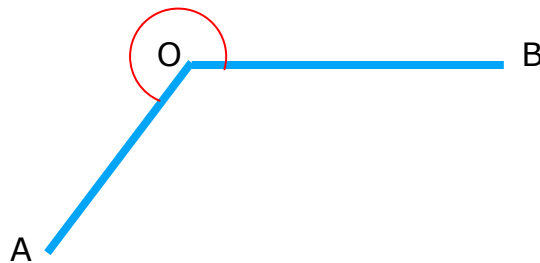




Llano o Colineal: Cuando mide 180° sexagesimales.



Entrante: Cuando mide entre 180° y 360° sexagesimales.



Perígono: Cuando mide 360° sexagesimales.



- **Cóncavos:** Miden entre 0° y 180° sexagesimales.
- **Convexos:** Miden entre 180° y 360° sexagesimales.
- **Complementarios:** Ángulos cuya suma vale 90° sexagesimales.
- **Suplementarios:** Ángulos cuya suma vale 180° sexagesimales.
- **Consecutivos o Contiguos:** Aquellos ángulos que tienen un vértice y un lado común.
- **Adyacentes:** Ángulos consecutivos que suman 180° sexagesimales.
- **Iguales:** Ángulos que cuando se superponen coinciden.



Los Polígonos y su Clasificación

Polígono: Figura geométrica formada por varios segmentos unidos entre sí formando vértices.

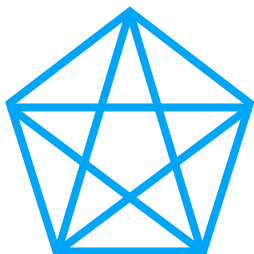
Decimos que un polígono es **Equiángulo** cuando todos sus ángulos son iguales y **Equilátero** cuando todos sus lados son iguales. **Polígono Regular** es aquel que tiene sus lados y sus ángulos iguales, es decir, es aquel que es equilátero y equiángulo.

Diagonal de un Polígono: Recta que une a dos vértices del mismo no consecutivos.

Apotema: Distancia entre el centro de un polígono regular y el punto medio de cada uno de sus lados.

- Un polígono tiene tantos ángulos como lados (ángulos = lados)
- En un polígono de (**n**) vértices se pueden trazar (**n - 3**). diagonales en cada vértice.
- El numero de diagonales de un polígono de (**n**) lados será
- **$n(n - 3)/2$**
- La suma de los ángulos internos de un polígono de (**n**) lados será igual a **$180 (n - 2)$** .

Los Polígonos se clasifican según el numero de lados: **Triángulos** (de tres), **Cuadriláteros** (de cuatro), **Pentágonos** (de cinco), **Hexágonos** (de seis), **Heptágonos** (de siete), **Octágonos** (de ocho), **Eneágonos** (de nueve), **Decágonos** (de diez), **Endecágonos** (de once), **Dodecágonos** (de doce), **Pentadecágono** (de quince), **Icoságono** (de veinte), Etc.

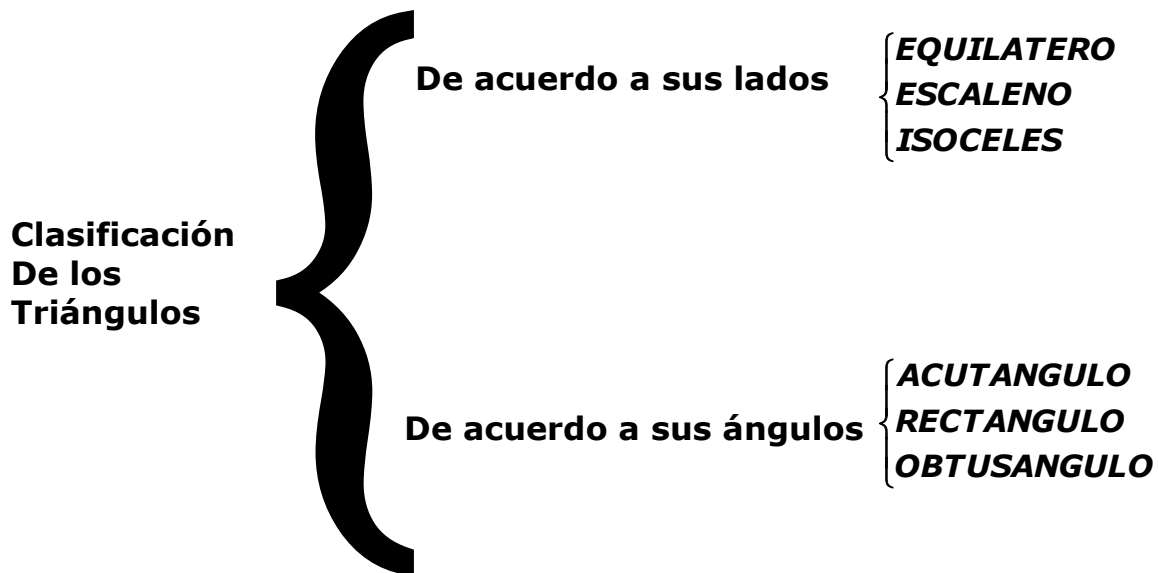


Al trazar las diagonales de un pentágono Resulta la **Estrella pentagonal** o **Estrella de Italia**, era el símbolo de la **escuela Pitagórica** y servía a los pitagóricos para Reconocerse entre sí.



Triángulos

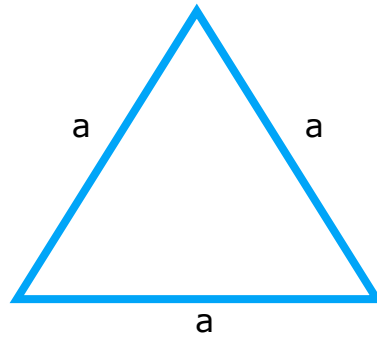
Un triángulo es un polígono de tres lados. Los elementos de un triángulo son: los **tres lados**, los **tres vértices**, y los tres **ángulos** que suman 180° . Su clasificación queda estructurada de la siguiente manera:



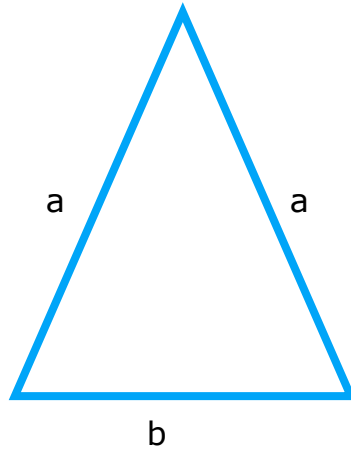
Nota: se utilizar el término "**triángulos oblicuángulos**" para referirse a los triángulos tanto acutángulos como obtusángulos. Pues haciendo homología respecto a las rectas, los triángulos oblicuángulos son aquellos, en que en ninguno de sus ángulos se cumple la propiedad de ser recto.



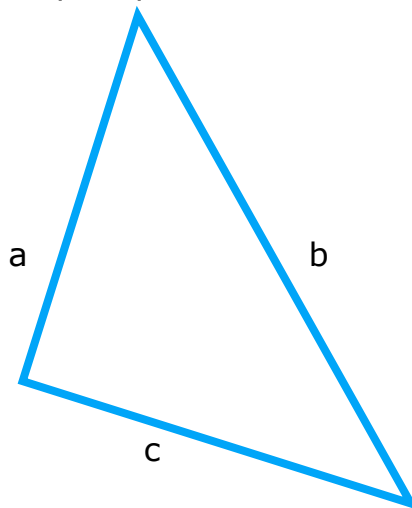
Triangulo Equilátero: es aquel que tiene sus tres lados iguales.



Triangulo Isósceles: es aquel que tiene dos lados iguales y uno desigual.



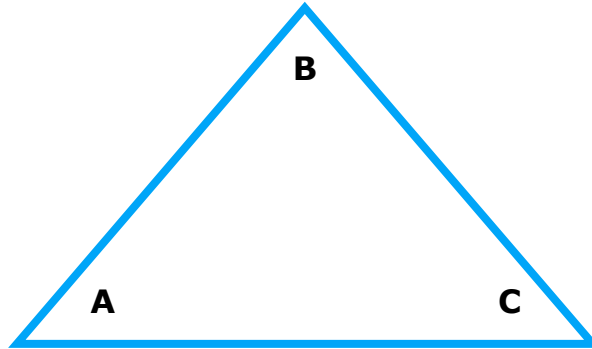
Triangulo Escaleno: es aquel que tiene sus tres lados desiguales.





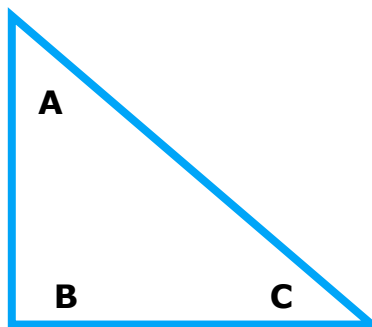
Triangulo Acutángulo: es aquel que tiene sus tres ángulos agudos.

$$\begin{aligned} A &< 90^\circ \\ B &< 90^\circ \\ C &< 90^\circ \end{aligned}$$



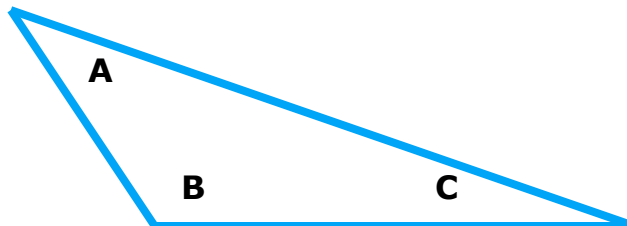
Triangulo Rectángulo: es aquel que tiene un ángulo recto y dos Agudos.

$$\begin{aligned} A &< 90^\circ \\ B &= 90^\circ \\ C &< 90^\circ \end{aligned}$$



Triangulo Obtusángulo: es aquel que tiene un ángulo obtuso y dos agudos.

$$\begin{aligned} A &< 90^\circ \\ B &> 90^\circ \\ C &< 90^\circ \end{aligned}$$



Nota: En cualquier triangulo la suma de sus 3 ángulos será igual a 180°



Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Sus elementos son: los **cuatro lados**, los **cuatro vértices**, y los **cuatro ángulos** que suman **360°**.

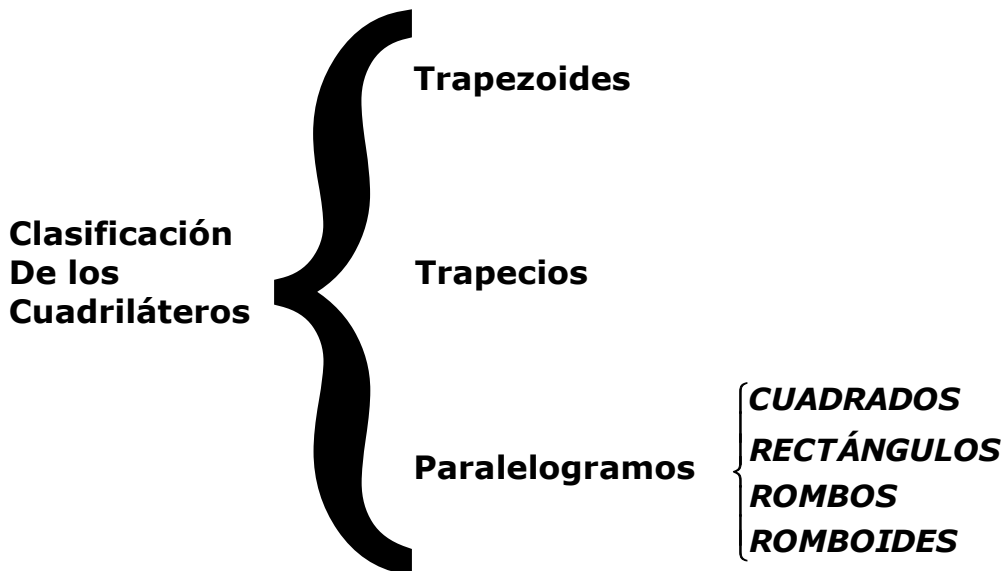
La clasificación de cuadriláteros se organiza de acuerdo a sus lados y sus vértices, así pues tenemos que conocer bien las siguientes definiciones.

Lados opuestos serán aquellos que no tienen ningún punto común.

Lados contiguos aquellos que tienen un extremo común.

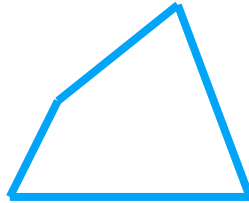
Vértices opuestos son aquellos que no están en el mismo lado.

Vértices contiguos son los que están sobre el mismo lado.





Trapezoide: son los que no tienen ningún lado paralelo



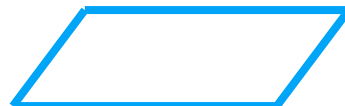
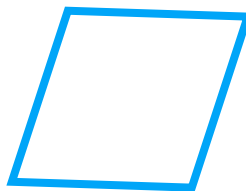
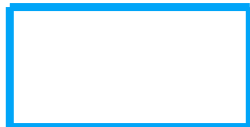
Trapecios: son los que tienen un par de lados paralelos y los otros no. A los dos lados paralelos se les llama bases del trapecio.

- Trapecio isósceles: sus lados opuestos no paralelos son iguales.
- Trapecio Rectángulo: uno de sus lados no paralelos es perpendicular a las bases.
- Trapecio Escaleno: ninguno de los dos lados no paralelos es perpendicular a las bases.

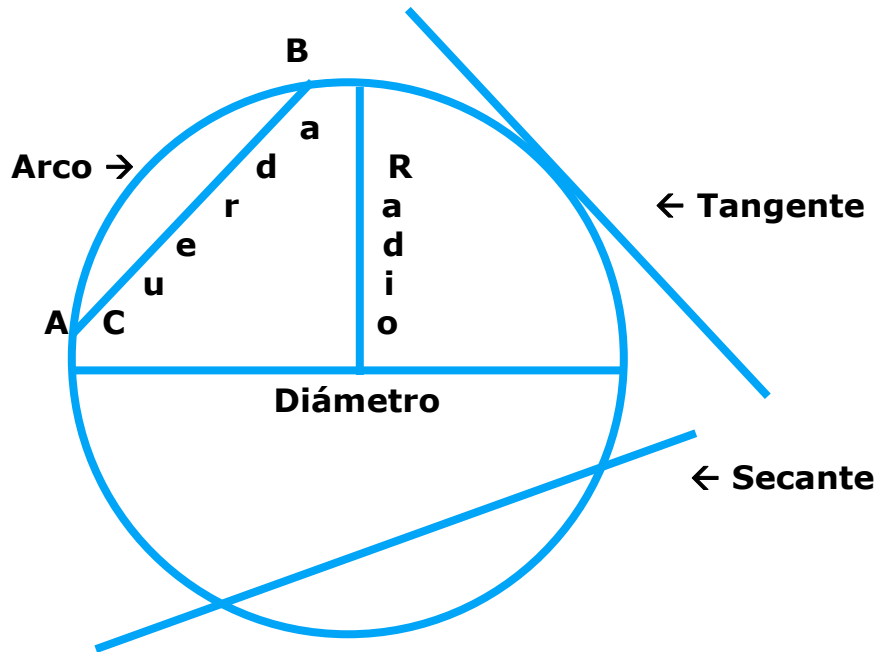


Paralelogramos: tienen los lados paralelos dos a dos.

- Cuadrado: tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.
- Rectángulo: tiene los lados iguales dos a dos y los cuatro ángulos rectos.
- Rombo: tiene los cuatro lados iguales pero los ángulos no son rectos.
- Romboide: tiene los lados iguales dos a dos y los ángulos no son rectos.



Circunferencia Y Círculo



Hemos estudiado los polígonos. Sabemos que pueden existir polígonos Regulares de 50, 100, 1000, 10000, y más... a medida que aumentan los lados, estos se hacen más pequeños, si se pudiera dibujar un polígono con infinitos lados, estos pasarían a ser puntos y el polígono se convertiría en una **circunferencia**. La apotema del polígono coincidiría con el radio de la circunferencia.

Así, podemos concluir que una circunferencia es aquel polígono, que tiene el número **máximo** de lados (infinito).

A continuación se definirán los conceptos mas importantes de una **circunferencia**, y de un **círculo**, que son la misma figura, solo que en diferentes **representaciones dimensionales**.

Circunferencia: Es una línea curva, cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de otro de su plano llamado centro.

Círculo: Es la parte de plano limitada por una circunferencia.



Radio: Segmento de recta comprendida desde cualquier punto de la circunferencia, (en caso de un círculo), o superficie esférica (en caso de una esfera), al centro del o de la misma.

Diámetro: Segmento de recta de mayor longitud comprendida entre dos puntos de la circunferencia o superficie esférica, y que pasa por el centro, Equivale a dos radios.

Cuerda: Segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia, nunca pasa por el centro.

Arco: Segmento de la circunferencia limitado por los extremos de una cuerda.

Flecha: Segmento que une el punto medio de la cuerda con el punto medio del arco.

Secante: Es la recta que tiene dos puntos en común con la circunferencia.

Tangente. Es la recta que tiene un punto en común con la circunferencia.

Segmento circular: es la parte del círculo limitada por un arco y su cuerda.

Sector circular: Es la parte del círculo limitada por su arco y los radios correspondientes a sus extremos.

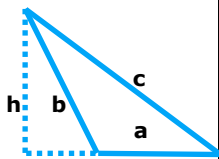
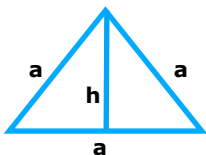
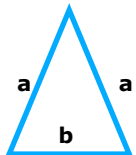
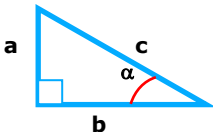
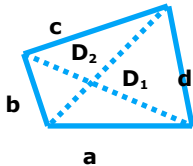
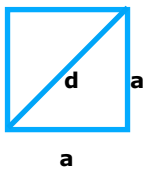
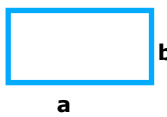
Circunferencias concéntricas: Son aquellas que tienen el mismo centro.

Corona circular: Es la parte de plano limitada por dos circunferencias concéntricas.

Elipse: Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos del mismo plano (llamados focos) es constante.

A continuación se muestra un **Formulario de Áreas y perímetros** de las figuras planas ya estudiadas.



Nombre	Figura	Notación	Perímetro (P)	Área (A)
Cualquier Triangulo		a, b, y c: lados h: altura S: semiperímetro	$P = a + b + c$ $S = \frac{a + b + c}{2}$	$A = \frac{1}{2}bh$ $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$
Triangulo Equilátero		a: c/u de los lados h: altura	$P = 3a$	$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$
Triangulo Isósceles		a, a, y b: lados h: altura	$P = 2a + b$	$A = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$
Triangulo Rectángulo		a, b, y c: lados S: semiperímetro	$P = a + b + c$	$A = \frac{ab}{2}$ $A = \frac{(b)(c)(\sin\alpha)}{2}$
Cualquier Cuadrilátero		a, b, c, d: lados D1 y D2: diagonales	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{\sqrt{4(D_1D_2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}}{4}$
Cuadrado		a: c/u de los lados d: diagonal	$P = 4a$ $d = a\sqrt{2}$	$A = a^2$ $A = \frac{d^2}{2}$
Rectángulo		a y b: lados	$P = 2(a + b)$	$A = ab$



Cuerpos Geométricos

Los cuerpos geométricos del espacio tridimensional se pueden clasificar en dos grandes grupos: **Poliedros Regulares** (tetraedro, hexaedro, octaedro, etc.), **Poliedros Semirregulares** (Prismas, y Pirámides) y **Cuerpos Redondos** (Cilindros, Conos, Esferas, etc.)

Poliedros Regulares: cuerpos geométricos limitados por polígonos regulares, según el número de caras que lo delimitan, los poliedros se clasifican en tetraedros (4 caras), Pentaedros (5 caras), Hexaedros (6 caras), dodecaedro (12 caras), e Icosaedro (20 caras). Es importante saber que solo existen 5 poliedros regulares y que sus elementos están relacionados por la formula del Teorema de **Euler:**

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$$

Poliedro	Figura de las Caras	Numero de Caras	Numero de Vértices	Numero de Aristas.
Tetraedro	Triángulos	4	4	6
Hexaedro	Cuadrados	6	8	12
Octaedro	Triangulo	8	6	12
Dodecaedro	Pentágonos	12	20	30
Icosaedro	Triángulos	20	12	30

Poliedros semirregulares: cuerpos geométricos limitados por varias clases diferentes de polígonos regulares, se pueden clasificar en prismas y pirámides.

Los Prismas están formados por varios paralelogramos y dos polígonos regulares, denominados bases que están contenidos en dos planos paralelos. Se clasifican en:

- Rectos y Oblicuos: Rectos cuando las caras laterales son rectángulos.
- Regulares e Irregulares: Según sea los polígonos de las bases.
- Forma de las bases: Pueden ser Triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.



Destaca de esta clasificación el Paralelepípedo que esta formado por seis caras que son paralelogramos paralelos e iguales dos a dos, (especial por que sus bases son paralelogramos).

Se le llamar **ortoedro** al prisma el cual esta formado por caras rectangulares, o cuadradas (Hexaedro).

Las Pirámides es el espacio comprendido entre el vértice de un Angulo poliedro y un plano que corta a todas las aristas del mismo.

Cuerpos Redondos:

Cilindro
Cono
Esfera
Toro
Elipsoide
Paraboloide

Superficie Esférica: Es la engendrada por la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro, y limita a una esfera.

Esfera: Parte del espacio limitada por una superficie esférica.

Hemisferio: También semiesfera, se forma cuando un plano divide a la superficie esférica en dos partes iguales, (pasa por el centro).

Casquete esférico: se forma cuando un plano divide a la superficie esférica, sin que el plano pase por el centro.

Zona Esférica: Porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos que la corten.

Rebanada esférica: es la parte del espacio limitada entre dos planos paralelos secantes a una esfera y la zona correspondiente.

Huso Esférico: Es la porción de superficie esférica limitada entre dos planos que se cortan según un diámetro.



Cuña esférica: Se llama así a la parte de espacio comprendido entre dos planos que se cortan según un diámetro y el huso esférico correspondiente

Sector Esférico: Porción de espacio comprendido entre un Casquete y la superficie cónica.



Trigonometría

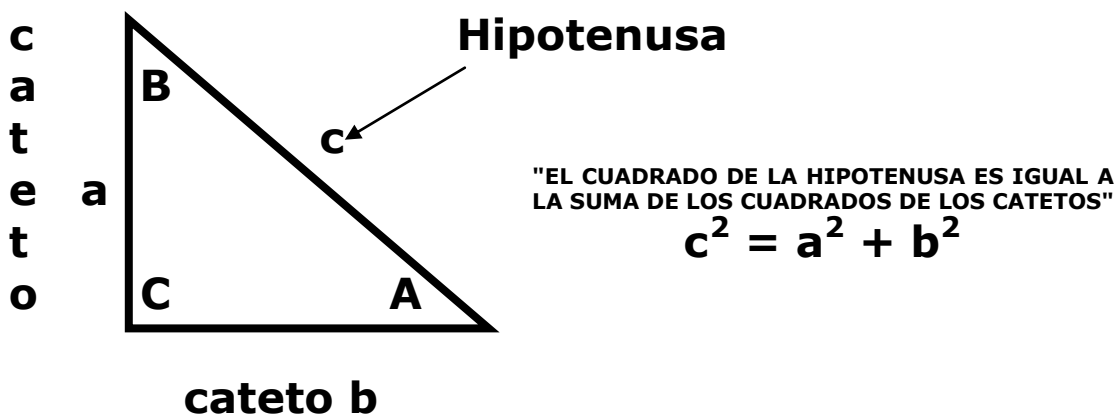
La palabra trigonometría proviene del vocablo griego **trígono** – triángulo-, y **metron** –medida-, que se refiere a las medidas de los ángulos de un triángulo.

La **trigonometría** es la rama de las matemáticas que intenta establecer las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, para así poder resolverlos.

Así entonces **resolver** un triángulo significa encontrar el valor de sus **tres lados**, y el de sus **tres ángulos**, para esto nos valdremos del **teorema de Pitágoras** para encontrar el valor de un lado, si es que ya conocemos dos, y de las **funciones trigonométricas** para conocer el valor de los ángulos internos si es que ya conocemos mínimo un lado.

Y así posteriormente podremos combinar las funciones trigonométricas con el teorema de Pitágoras para poder resolver problemas de mayor dificultad.

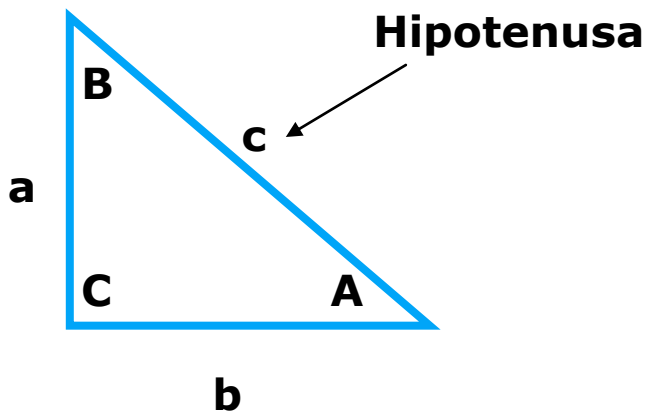
Teorema de Pitágoras





Funciones Trigonometricas

Como lo dijimos anteriormente las funciones trigonometricas nos servirán para relacionar los lados de un triangulo rectángulo para así hallar el valor de sus ángulos internos.



$$\text{SEN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{COS } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{TAN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{CTG } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{SEC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{CSC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{SEN } B = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{COS } B = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{TAN } B = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{CTG } B = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{SEC } B = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{CSC } B = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{c}{b}$$



Las funciones anteriores las llamamos **funciones trigonometricas directas**, pues con ellas establecemos las relaciones entre los catetos y la hipotenusa, las primeras 3 (sen, cos, tan) son las mas importantes, por ser las mas utilizadas, las ultimas 3 (Ctg, sec, Csc) si se observa bien son reciprocas a las primeras tres. Y la relación de **reciprocidad** queda como sigue:

$$\text{SEN } X = \frac{1}{\text{CSC } X}$$

$$\text{CTG } X = \frac{1}{\text{TAN } X}$$

$$\text{COS } X = \frac{1}{\text{SEC } X}$$

$$\text{SEC } X = \frac{1}{\text{COS } X}$$

$$\text{TAN } X = \frac{1}{\text{CTG } X}$$

$$\text{CSC } X = \frac{1}{\text{SEN } X}$$

Existen también las **funciones Trigonometricas inversas**, y con estas podemos obtener el valor de un ángulo, si conocemos primero el valor de la función trigonométrica directa, y se puede obtener utilizando una calculadora, o alguna tabla en la que se muestren los valores correspondientes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\text{Tan } 45^\circ &= 1 \\ \text{Tan}^{-1} 1 &= 45^\circ\end{aligned}$$

Como hemos visto es fácil obtener las funciones trigonometricas de un ángulo agudo, sin embargo, cuando se trata de ángulos mayores, es necesario trazar un sistema de ejes cartesianos, y trazar una circunferencia con centro en el origen (**circulo unitario**) con una unidad de radio, y simular los ángulos de diferentes magnitudes utilizando para esto los cuadrantes del plano. Se observara que cada función tendrá signos diferentes según en que cuadrante se encuentre el ángulo.



Funciones Trigonómicas de Otros Ángulos

Los catetos "OC" y "BC" son positivos.

$$\text{SEN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{a}{c}$$

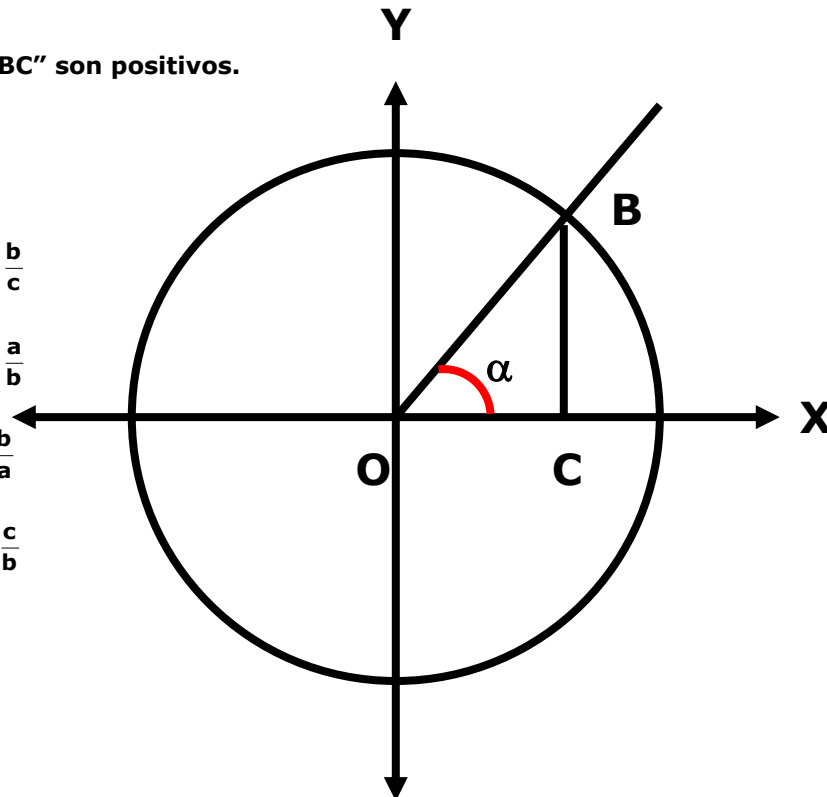
$$\text{COS } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{TAN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{CTGA} = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{SEC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{CSC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{c}{a}$$



El cateto "OC" es negativo.

$$\text{SEN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{a}{c}$$

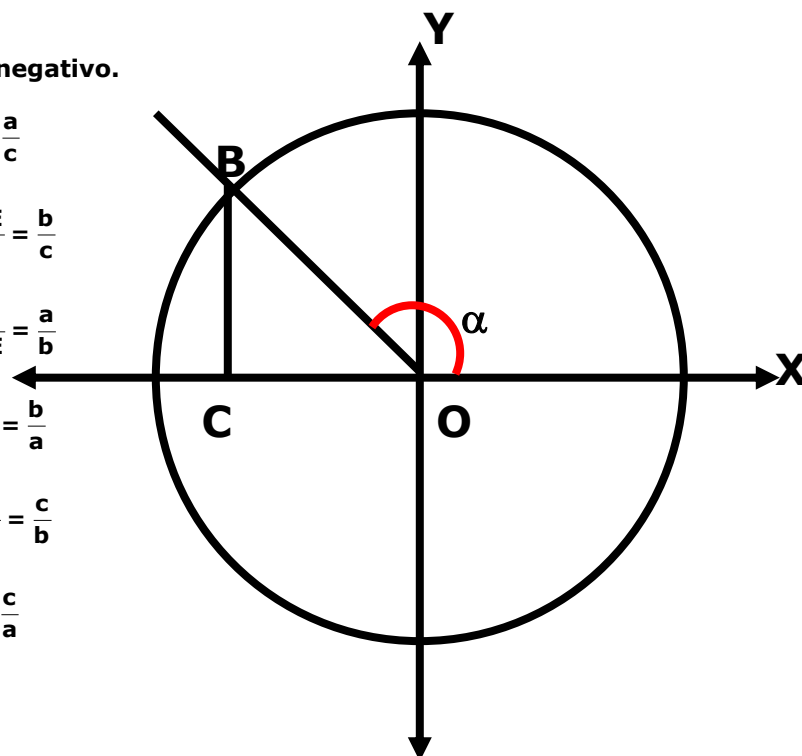
$$\text{COS } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{TAN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{CTGA} = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{SEC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{CSC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{c}{a}$$





El cateto "OC" y "BC" son negativos.

$$\text{SEN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{a}{c}$$

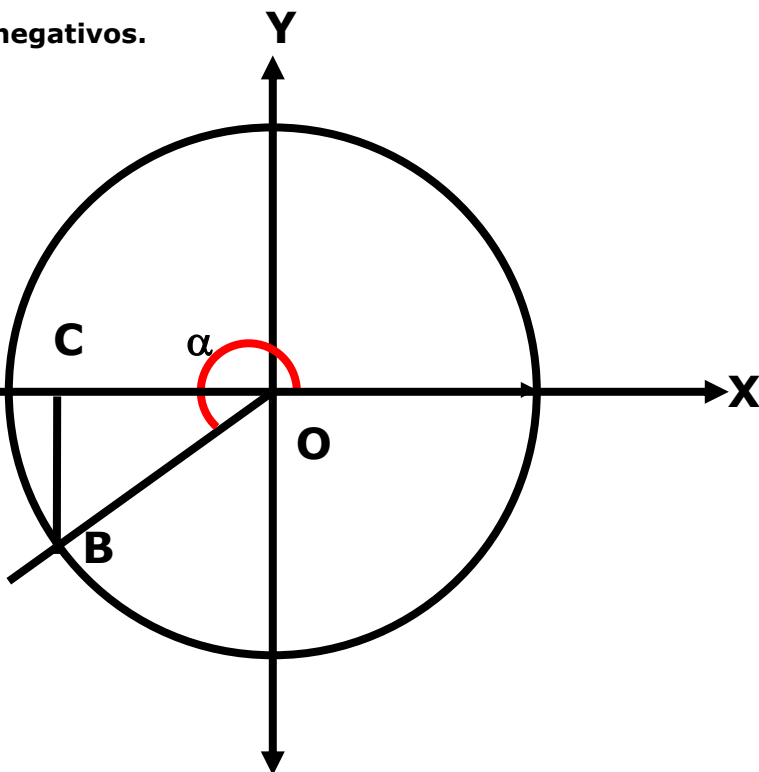
$$\text{COS } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{TAN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{CTG } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{SEC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{CSC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{c}{a}$$



El Cateto "BC" es negativo.

$$\text{SEN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{a}{c}$$

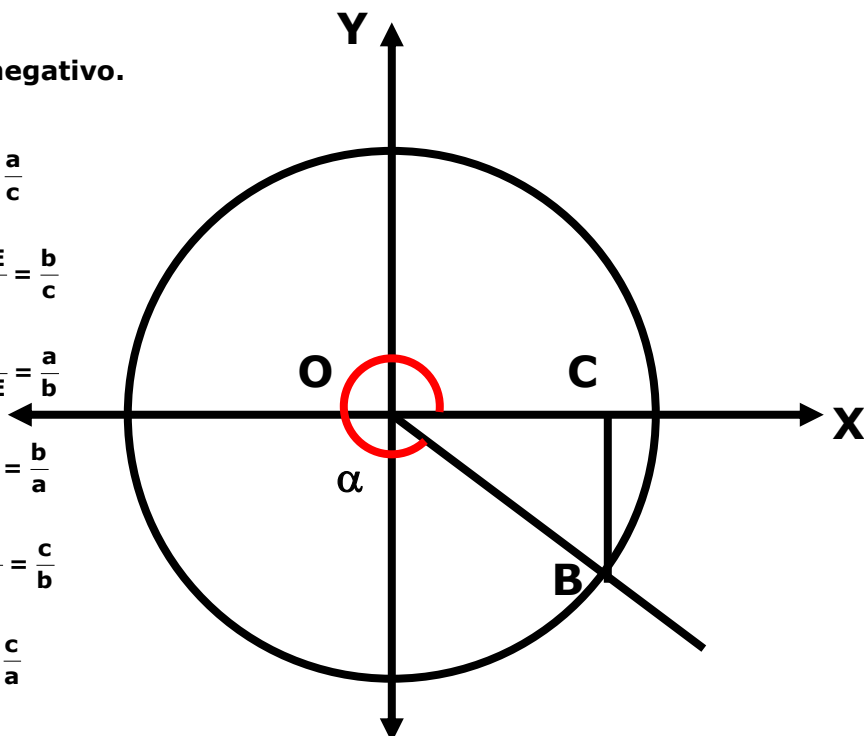
$$\text{COS } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{TAN } A = \frac{\text{CATETO OPUESTO}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{CTG } A = \frac{\text{CATETO ADYACENTE}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{SEC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO ADYACENTE}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{CSC } A = \frac{\text{HIPOTENUSA}}{\text{CATETO OPUESTO}} = \frac{c}{a}$$





$$\begin{aligned}\text{Sen } \alpha &= \text{ordenada/radio} = \text{BC/OB} \\ \text{Cos } \alpha &= \text{abscisa/radio} = \text{OC/OB} \\ \text{Tan } \alpha &= \text{ordenada/abscisa} = \text{BC/OC} \\ \text{Ctg } \alpha &= \text{abscisa/ordenada} = \text{OC/BC} \\ \text{Sec } \alpha &= \text{radio/abscisa} = \text{OB/OC} \\ \text{Csc } \alpha &= \text{radio/ordenada} = \text{OB/BC}\end{aligned}$$

Estas funciones nos permiten generalizar para **cualquier ángulo**. Aunque debe tenerse en cuenta el signo de cada función correspondiente a cada cuadrante, pues si el extremo B se encuentra en el primer cuadrante, su ordenada y abscisa es positiva así entonces todas las funciones del **primer cuadrante** son positivas.

Si el extremo B se encuentra en el **segundo cuadrante**, su ordenada es positiva y su abscisa es negativa; por tanto el seno y la cosecante son positivos

Si el extremo B llega hasta el **tercer cuadrante**, ordenada y abscisa negativa, serán positivas la tangente y la cotangente

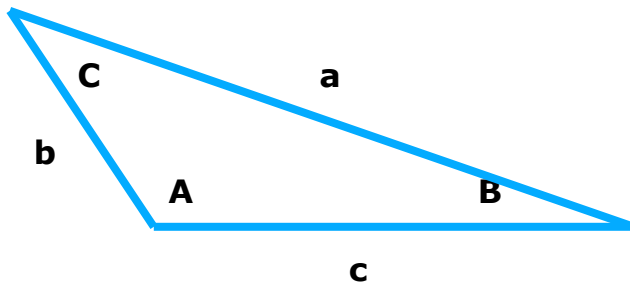
Si el extremo se encuentra en el **cuarto cuadrante**, es positiva la abscisa y negativa la ordenada; luego son positivos el coseno y la secante. Podemos resumir estos resultados en el siguiente cuadro.

Cuadrante	I (0)	II	III	IV
Sen α	+	+	-	-
Cos α	+	-	-	+
Tg α	+	-	+	-
Cotg α	+	-	+	-
Sec α	+	-	-	+
Csc α	+	+	-	-



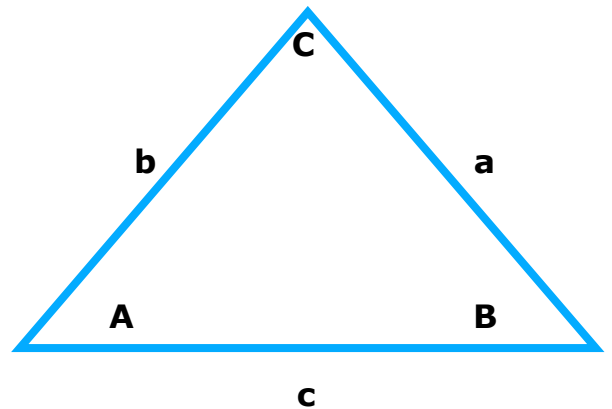
Ley del Seno y Coseno

Hasta ahora hemos visto la relación de lados-ángulos de un triángulo rectángulo, estableciendo las operaciones que debemos de efectuar para resolver este tipo de triángulos. Aunque cabe mencionar que el uso del teorema de Pitágoras, y las funciones trigonometricas no nos servirán para resolver triángulos oblicuángulos, para esto estableceremos nuevas relaciones para obtener las formulas correspondientes (ley de seno y coseno), y así encontrar los valores incógnitos.



Ley Del Seno

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$



Ley Del Coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

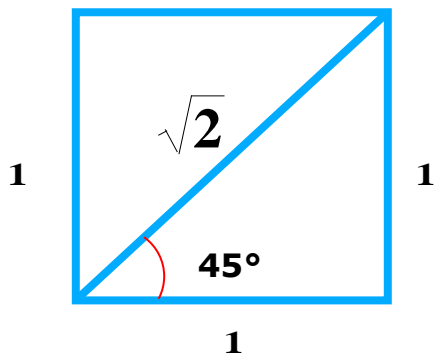
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Nota: la ley del seno y coseno, nos ayudan a resolver triángulos oblicuángulos, o sea triángulos acutángulos y obtusángulos, solo es necesario aplicar la ecuación correspondiente.



Ángulos Especiales

Cuadrado

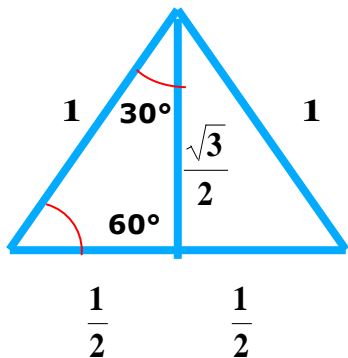


$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tan } 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Triangulo Equilátero



$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tan } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nota: En el seno y coseno de 45° , así como en la tangente de 30° , se ha racionalizado la fracción principal, para simplificar los radicales en el denominador, y pasarlos al numerador.



Identidades Trigonómicas

$$\text{SEN}^2 X + \text{COS}^2 X = 1$$

$$\text{SEC}^2 X - \text{TAN}^2 X = 1$$

$$\text{CSC}^2 X - \text{CTG}^2 X = 1$$

$$\text{TAN } X = \frac{\text{SEN } X}{\text{COS } X}$$

$$\text{CTG } X = \frac{\text{COS } X}{\text{SEN } X}$$

Una identidad Trigonómica es una igualdad que se cumple para cualquier valor, las que aquí se muestran son las de mayor importancia, pues estas nos ayudaran a simplificar identidades mas complejas, y así lograr demostrar su igualdad.

Así entonces demostrar una identidad trigonométrica es un conjunto de procedimientos que nos permiten comprobar que 2 expresiones en apariencias diferentes son en realidad iguales entre sí. **No existe** un procedimiento único, se puede llegar al resultado siguiendo diferentes maneras, sin embargo pueden darse las siguientes sugerencias:

1. Realizar las operaciones indicadas (suma, resta, multiplicación, división, etc.)
2. Trabajar con el miembro de la ecuación aparentemente mas complejo
3. Las funciones tan, Ctg, Sec, Csc, ponerlas en función de Sen, y Cos.



Cofunciones Trigonométricas

$$\text{Sen } (90 - x) = \text{Cos } x$$

$$\text{Tan } (90 - x) = \text{Ctg } x$$

$$\text{Sec } (90 - x) = \text{Csc } x$$

$$\text{Cos } (90 - x) = \text{Sen } x$$

$$\text{Ctg } (90 - x) = \text{Tan } x$$

$$\text{Csc } (90 - x) = \text{Sec } x$$

Ecuaciones Trigonométricas

Llamaremos Ecuaciones trigonométricas a aquellas en las que intervengan una o varias razones trigonométricas de las incógnitas o de expresiones que las contengan.

Existen tres tipos de ecuaciones trigonométricas:

1. Las mas sencillas de la forma: Sen x= n; Cos x= n; Tg x= n

$$\text{Sen } x = \frac{1}{2}$$

$$4 \text{Tg } x = 4$$

$$\text{Sen } x - \sqrt{\frac{1}{4}} = 0$$

2. O de la forma sen (P (x))=n; Cos (P (x))=n; Tg (P (x))=n

$$3 \cos x = \sec x$$

$$\text{Tg } x = \text{Tg } 2x$$

$$\text{Tg } x - (1 + \sqrt{3}) \text{tg } x + \sqrt{3} = 0$$



3. O cuando intervienen en una misma ecuación mas de una razón trigonométrica (Nota: se escriben todas en función de una de ellas)

$$\text{Sen } x + \text{Cos}^2 x = 5/4$$

$$\text{Sen } x = \text{sen } (2\pi/3)$$

$$\text{Sen}^2 x = \text{Cos}^2 x$$

$$\text{Sen } x + \text{Cos } 2x = 1$$

Finalmente en el caso de sistema de ecuaciones trigonométricas habrá que aplicar convenientemente los métodos conocidos.

$$\text{Cos } x + \text{Cos } y = -1$$

$$\text{Cos } x - 2 \text{ Sen } y = -3$$

NOTA:

Para encontrar todos los valores que satisfagan la ecuación, tenemos que tomar en cuenta los signos de las funciones en los cuadrantes....



Formulas Trigonometricas Diversas

1. Adición de ángulos

$$\text{Sen } (a+b) = \text{Sen } a \text{ Cos } b + \text{Cos } a \text{ Sen } b$$

$$\text{Cos } (a+b) = \text{Cos } a \text{ Cos } b - \text{Sen } a \text{ Sen } b$$

$$\text{Tan } (a+b) = \frac{\text{Tan } a + \text{Tan } b}{1 - (\text{Tan } a)(\text{Tan } b)}$$

2. Ángulos Dobles

$$\text{Sen } (2a) = 2 \text{ Sen } a \text{ Cos } a$$

$$\text{Cos } (2a) = \text{Cos}^2 a - \text{Sen}^2 a$$

$$\text{Tan } (2a) = \frac{2 \text{ Tan } a}{1 - \text{Tan}^2 a}$$

3. Diferencia de ángulos

$$\text{Sen } (a-b) = \text{Sen } a \text{ Cos } b - \text{Cos } a \text{ Sen } b$$

$$\text{Cos } (a-b) = \text{Cos } a \text{ Cos } b + \text{Sen } a \text{ Sen } b$$

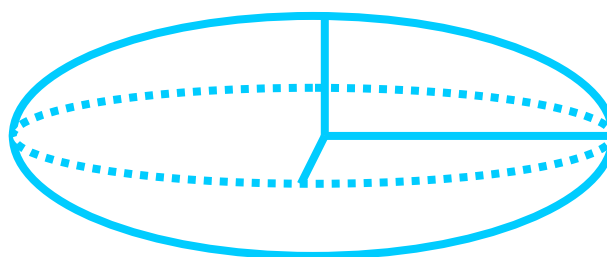
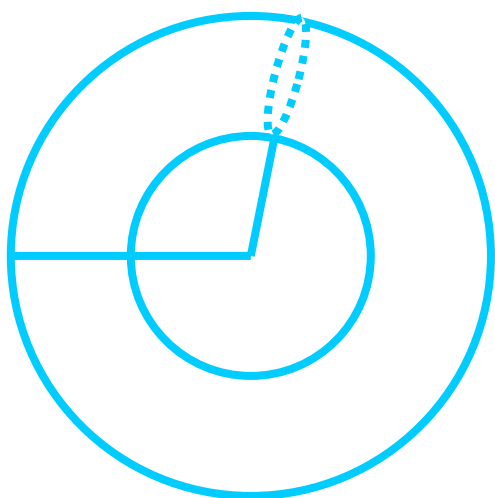
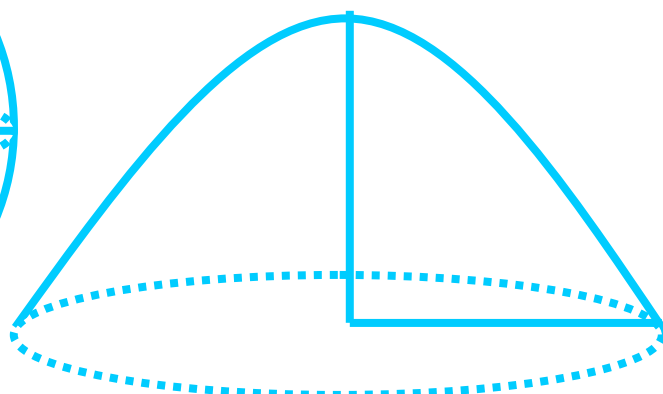
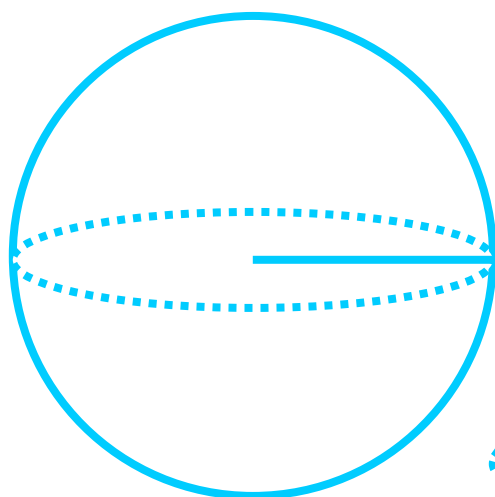
$$\text{Tan } (a-b) = \frac{\text{Tan } a - \text{Tan } b}{1 + (\text{Tan } a)(\text{Tan } b)}$$

4. Ángulos Mitad

$$\text{Sen } (a/2) = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } a}{2}}$$

$$\text{Cos } (a/2) = \sqrt{\frac{1 + \text{Cos } a}{2}}$$

$$\text{Tan } (a/2) = \sqrt{(1 - \text{Cos } a)(1 + \text{Cos } a)}$$





Bibliografía

Escareño, Fortino. Matemáticas. Ed. Trillas. Primera Edición. México. 1998

Briseño, Luis Alberto. Matemáticas 3. Ed. Trillas. Primera Edición. Sexta reimpresión. México. 1999

Spiegel, Murray. Manual de formulas y tablas Matemáticas. Ed. McGraw Hill. Primera Edición. México. 2000

Fornals, Purificación. Ayúdame con la Tarea de Matemáticas 3. Ed. Lexus. Primera Edición. España. 2002

Escartin, Rosa. Enciclopedia Reymo: Matemáticas. Ed. Reymo. Primera Edición. España. 2003

Caballero, Arquímedes. Tablas Matemáticas. Ed. Esfinge. Quincuagésimo cuarta edición. México. 2004

<http://www.mate.com.mx>

<http://www.matematicas.net>

<http://www.es.encarta.msn.com>

<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri>